Preuzeto sa Interneta

RAZNI DOKAZI PITAGORINE TEOREME

O PITAGORI I NJEGOVOJ TEOREMI

Za ime Pitagore vezane su mnoge priče i legende. Priča se da je Pitagora u mladosti mnogo putovao i da je proputovao Egipat, Malu Aziju i Vavilon. Prilikom ovih putovanja on je skupio mnoga znanja starih naroda (iz matematike, astronomije i tehnike). Po povratku u svoju zemlju – ostrvo Samos – zadivio je svoje zemljake, pa su ga ovi smatrali polubogom ... Polikart, vladar ostrva, bojeći se da Pitagora ne radi protiv njega, naredio je svojim ljudima da ga proteraju. Kada je Pitagora ovo saznao, napustio je rodno ostrvo i prešao u grad Krotone južne Italije. Kasnije je prešao u grad Metapont. Smatra se da su Pitagora i njegova škola položili osnove teorije brojeva, zasnovali osnove grčke algebre i izučavali proporcije i progresije.

U geometriji je posebno značajna teorema koja nosi ime Pitagore, a odnosi se na pravougli trougao ili tačnije na površine kvadrata konstruisanih nad katetama i hipotenuzom. Teorema glasi:

Zbir površina kvadrata konstruisanih nad katetama kao stranicama jednak je površini kvadrata konstruisanog nad hipotenuzom kao stranicom.

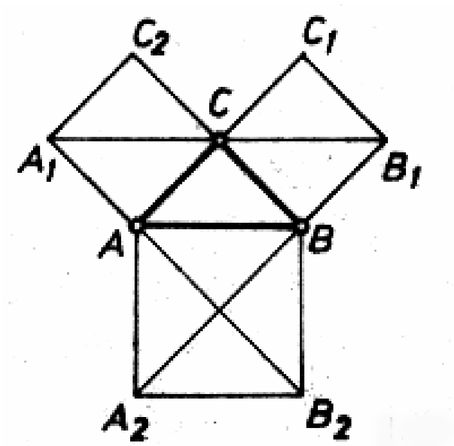
Drugim rečima, ako su *a* i *b* merni brojevi dužine kateta i c merni broj dužine hipotenuze, izražene istom jedinicom za dužinu, onda je

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Predanje kazuje da je Pitagora, za pronalazak ove teoreme, prineo kao žrtvu bogovima stotinu bikova pa se zbog toga ova teorema u srednjem veku nazivala *gekatomba*, što u prevodu znači sto bikova. Međutim, i danas je otvoreno pitanje da li je Pitagora pronašao ovu teoremu ili je ona rezultat njegove škole ili je možda bila poznata i pre Pitagore, jer je poznato da su još u starom Egiptu, na 2000 i 3000 godina pre naše ere, Egipćani znali da je trougao sa stranicama 3,4 i 5 jedinica pravougli trougao i ovo koristili za obrazovanje pravog ugla na tlu.

Do danas nije poznato kako je i ko je prvi dokazao teoremu Pitagore. Svakako je prvi dokaz pronađen za jednakokraki pravougli trougao ABC (slika 1.), jer za ovakav trougao, povlačenjem dijagonala A_1C, B_1C, AB_2 i BA_2, neposredno izlazi da se kvadrat ABB_2A_2 nad hipotenuzom sastoji iz četiri međusobno podudarna jednakokraka trougla koji su podudarni sa jednakokrakim pravouglim trouglovima: A_1AC, A_1C_2C, BB_1C i B_1C_1C iz kojih su sastavljeni kvadrati nad katetama, kao i sa datim trouglom ABC, jer imaju jednake hipotenuze i uglove na njoj od 45^o.

slika 1.



2. NEKOLIKO DOKAZA ZA BILO KOJI PRAVOUGLI TROUGAO

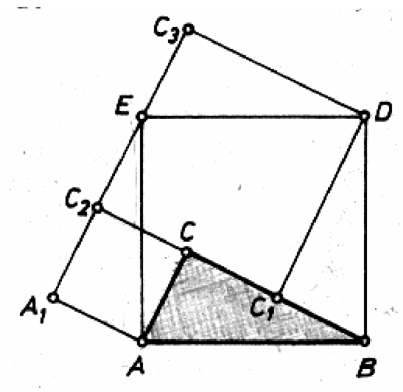
Danas je poznato oko stotinu dokaza Pitagorine teoreme za proizvoljan pravougli trougao. Međutim, kada se ovi dokazi bolje prouče, tada se uviđa da se oni mogu podeliti u četiri grupe.

I GRUPA

Ova grupa dokaza se zasniva na izjednačavanju površina.

<u>*Prvi dokaz:*</u> (slika 2.) Ovaj dokaz se naziva prvim induskim dokazom, a takođe je poznat i pod imenom "stolica mlade".

slika 2.



Kada se nad hipotenuzom *AB datog* pravouglog trougla *ABC*, kao nad stranicom, konstruiše kvadrat *ABDE* i iz *D* povuče normala DC_1 na katetu *BC*, dobija se pravougli trougao BDC_1 podudaran sa datim trouglom *ABC*, jer imaju jednake hipotenuze (*AB* = *BD*) i oštre uglove na temenima u *B* i *D* ($\angle ABC = \angle BDC_1$ kao uglovi sa normalnim kracima).

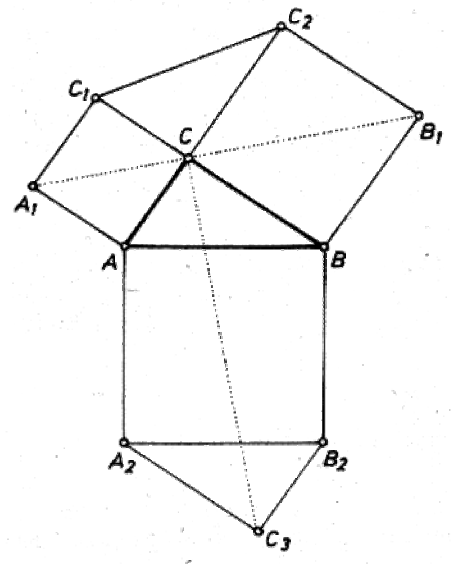
Ako se dati pravougli trougao *ABC* zarotira oko *A* za 90 stepeni u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku, onda će on doći u položaj AEA_1 ; ako se trougao BDC_1 zarotira oko *D* za 90 stepeni u smeru kretanja kazaljke na časovniku , onda će on doći u položaj EDC_3, pri čemu će tačke C_3, *E* i A_1 pripadati istoj pravoj. Produžavanjem katete *BC* do preseka C_2 sa katetom A_1E, dobija se kvadrat ACC_2A_1 nad katetom *AC* i kvadrat $C_1C_2C_3D$ nad katetom $DC_3=BC$. Iz ovako dobijene slike sledi da važi jednakost za površine mnogouglova:

$$ABDE = ACC_1DC_3A_1 = ACC_2A_1 + C_1C_2C_3D$$

Prema ovome, kvadrat nad hipotenuzom *AB* jednak je zbiru kvadrata nad katetama *AC* i *BC* datog pravouglog trougla ABC.

<u>*Drugi dokaz*</u>: Ovaj dokaz je pronađen 1769. godine od strane nemačkog matematičara Tempelhoff-a i sastoji se u sledećem. Nad katetama AC i BC, i nad hipotenuzom AB (slika 3.), kao nad stranicama, konstruisani su kvadrati: ACC_1A_1, BCC_2B_1 i ABB_2A_2. Zatim je C_1 spojeno sa C_2 i nad A_2B_2 konstruisan je pravougli trougao $A_2B_2C_3$ tako da je $A_2C_3=BC$ i $B_2C_3=AC$. Kada se spoji A_1 sa B_1 C sa C_3, dobijaju se četvorougli ABB_1A_1, $A_1C_1C_2B_1$, CAA_2C_3 i CBB_2C_3.

slika 3.



Prvi od ovih četvorouglova podudaran je sa četvrtim. Slično ovome drugi četvorougao je podudaran sa trećim.Prema ovome, i zbir površina prva dva četvorougla jednak je zbiru površina poslednja dva četvorougla.

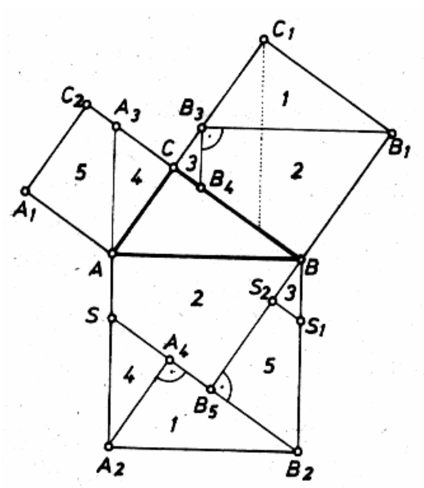
Budući da se zbir prva dva četvorougla sastoji od kvadrata ACC_1A_1 i BCC_2B_1 kao i podudarnih pravouglih trouglova ABC i C_1C_2C , a zbir poslednja dva četvorougla sastoji se iz kvadrata ABB_2A_2 nad hipotenuzom i pravouglih trouglova ABC i $AA_2B_2C_3$, pri čemu su trouglovi C_1C_2C, ABC i $A_2B_2C_3$ podudarni. Sledi da je zbir kvadrata nad katetama jednak kvadratu nad hipotenuzom.

II GRUPA

Ovu grupu čine dokazi pomoću razlaganja površina pa se zato nazivaju i mozaičkim dokazima.

*Treći dokaz:*Ovaj dokaz potiče iz 900.godine nove ere od Anerizi-a (Annairizi) i sastoji se u sledećem. Na slici 4. kvadrati nad katetama i kvadrat nad hipotenuzom rastavljeni su na četvorouglove označene sa 2 i 5, i na trouglove označene sa 1,3 i 4, pri čemu su S i S_1 sredine stranica AA_2, odnosno BB_2 , duž B_1B_3 paralelna hipotenuzi AB, a duž AA_3 produžetak stranice AA_2.

slika 4.



Četvorouglovi označeni sa 2 su podudarni i četvorouglovi označeni sa 5 su takođe podudarni.

Trouglovi označeni sa 1 podudarni su sa datim pravouglim trouglom ABC.Pravougli trouglovi označeni sa 3 podudarni su jer $B_3B_4=BS_1$ i $<CB_3B_4=<S_2BS_1$.

Trouglovi označeni sa 4 takođe su podudarni jer $A_2A_4=AC$ i $<SA_2A_4=<A_3AC$.

Iz obrazloženog sledi da je zbir delova kvadrata nad katetama jednak zbiru (delova) kvadrata nad hipotenuzom.

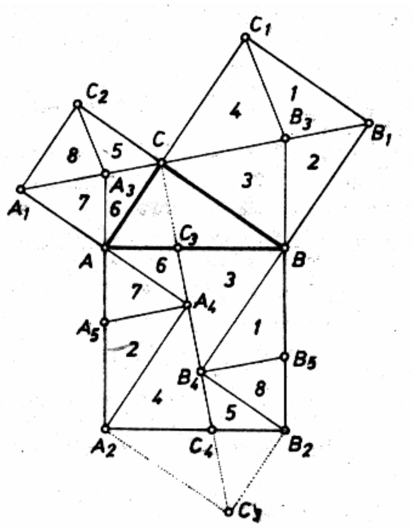
Četvti dokaz:Ovaj dokaz potiče od Epstajna (Epstein) iz 1906. godine i sastoji se u tome da se kvadrati nad katetama i kvadrat nad hipotenuzom rastave na trouglove, označene sa 1,2,3,4,5,6,7 i 8 (slika 5.), na sledeći način.

Prvo se nad stranicom A_2B_2 konstruiše pravougli trougao $A_2B_2C_5$ tako da je $A_2C_5=BC$ i $B_2C_5=AC$, i spoji A_1 sa B_1 i C sa C_5.Zatim se u kvadratima nad katetama A_2A produži do preseka A_3 i A_2 spoji sa C_2, a u kvadratu nad katetom BC produži B_2B do preseka B_3 i B_3 spoji sa C_1.

U kvadratu nad hipotenuzom iz A_2 i B povuku se paralele sa katetom AC do preseka A_4 odnosno B_4 sa C_3C_4 i A_4 spoji sa A, a B_4 spoji sa B_2.Osim toga, iz A_4 i B_4 povuku se paralele sa A_1B_1 do preseka A_5 sa AA_2 odnosno do preseka B_5 sa BB_2.

Na ovaj način su dobijeni trouglovi označeni sa 1,2,3,4,5,6,7 i 8 koji čine kvadrate nad katetama odnosno kvadrat nad hipotenuzom.

slika 5.



Trouglovi označeni sa 1 i 2 koji pripadaju kvadratu BCC_1B_1, su podudarni jer imaju jednake po dve stranice ($B_1C_1=BB_1$ i $B_1B_3=B_1B_3$) i zahvaćeni ugao ($<C_1B_1B_3=<BB_1B_3=45^o$) ; slično važi i za trouglove označene sa 3 i 4 koji pripadaju kvadratu BCC_1B_1. Za trouglove označene sa 5 i 6 odnosno 7 i 8, koji pripadaju kvadratu ACC_2A_1, važi slično, tj. 5 podudaran sa 6 i 7 podudaran sa 8.

Za trouglove koji čine kvadrat nad hipotenuzom nalazi se sledeće.Iz A_2A_4 normalno na BC i C_4C_3 normalno na BC sledi $<A_2A_4C_4=<BCB_3=45^o$.Prema ovome $A_2A_4=A_2AC_5=BC$, jer je trougao $A_4C_5A_2$ jednakokraki, i $AA_4=AC$, jer je trougao AA_2A_4 podudaran trouglu ABC budući da je $<AA_2A_4=<ABC$ kao uglovi sa normalnim kracima.

Kako trougao AA_2A_4 i BB_2B_4 imaju jednaku po jednu stranicu ($AA_2=BB_2$) i jednake uglove jer su stranice jednog paralelene stranicama drugoga, to je trougao AA_2A_4 podudaran trouglu BB_2B_4, a iz A_4A_5 paralelno sa B_4B_5 sledi $A_4A_5=B_4B_5$.Prema ovome za trouglove označene 1,2,7 i 8 važi : 1 je podudaran sa 2 i 7 je podudaran sa 8.Osim ovoga, 3 je podudaran sa 4 jer imaju jednaku po jednu stranicu ($A_2B_4=B_2B_4$) i po dva nalegla ugla ($<A_2A_4C_4=<BB_4C_3$ i $<C_4A_2A_4=<C_3BB_4$ kao uglovi sa paralelnim kracima) ; 7 podudaran sa 8 jer imaju jednaku po jednu stranicu ($AA_4=B_2B_4$) i po dva nalegla ugla ($<AA_4A_5=<B_2B_4B_5$ i $<A_4AA_5=<B_5B_2B_4$ kao uglovi sa paralelnim kracima); 5 podudaran sa 6 jer imaju jednaku po jednu stranicu ($B_2B_4=AA_4$) i po dva nalegla ugla ($<B_4B_2C_4=<C_3AA_4$ i $<B_2B_4C_4=<C_3AA_4$ kao uglovi sa paralelnim kracima).

Trouglovi označeni sa 1,2,3,4,5,6,7 i 8, koji čine kvadrat nad hiponuzom, podudarni su redom sa trouglovima označenim sa 1,2,3,4,5,6,7 i 8 koji čine kvadrate nad katetama.Iz ovoga sledi da je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbiru kvadrata nad katetama datog pravouglog trougla *ABC*.

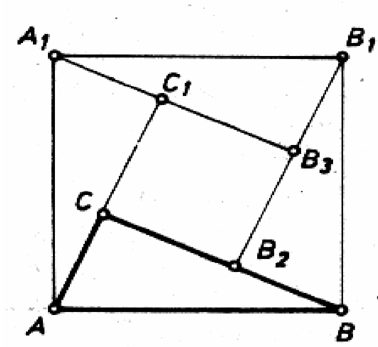
III GRUPA

Ovu grupu čine dokazi pomoću računanja.

Peti dokaz: Ovaj dokaz potiče od Baskare (Bhaskara) koji je rođen 1114. godine.Prema slici 6. nad hipotenuzom *AB* datog pravouglog trougla *ABC* konstruisan je kvadrat ABB_1A_1. Zatim je iz A_1 povučena A_1B_3 paralelna sa *BC* i iz B_1 povučena duž B_1B_2 paralelna sa *AC*. Kada se *AC* produži do preseka C_1 sa A_1B_3, tada se kvadrat nad hipotenuzom *AB* sastoji od kvadrata $CC_1B_3B_2$, čija je dužina stranice jednaka razlici *a*-*b* kateta (a=BC i b=BC=BB_2) datog pravouglog trougla *ABC*, i četiri podudarna pravougla trougla : *ABC* , AA_1C_1 , $A_1B_1B_3$ i BB_1B_2. Prema ovome sledi:

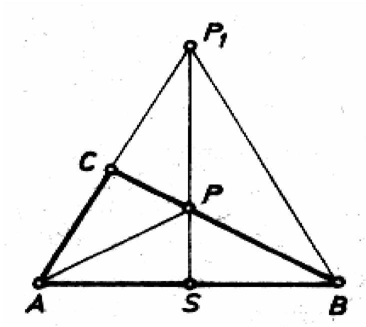
$$c^2=(a-b)^2+4(ab)/2 \quad \text{ili} \quad c^2=a^2+b^2.$$

slika 6.



Šesti dokaz: Ovaj dokaz je iz 1909. godine i potiče od Havkinsa (Hawkins), a zasniva se na slici 7. gde je u središtu *S* hipotenuze podignuta normala (simetrala hipotenuze) do preseka P_1 sa produženom katetom *AC* i P_1 spojeno sa temenom *B*, a presek *P* normale SP_1 sa katetom *BC* spojen sa temenom *A*. Površina četvorougla *APBP*1 može se izračunati na dva načina.

slika 7.



Prvo, kao zbir površina podudarnih trouglova APP_1 i BPP_1 koji imaju zajedničku osnovicu PP_1 i visine AS=BS=$c/2$. Prema ovome:

$APBP_1 = 1/2 * PP_1 * c/2 + 1/2 * PP_1 * c/2 = PP_1 * c/2$.

Budući da je trougao CPP_1 sličan trouglu *ABC*, sledi : $PP_1=k*c$, $CP_1=k*a$, $PC=k*b$, gde je *k* faktor proporcionalnosti različit od nule i gde su *c, a* i *b* merni brojevi dužina stranica *AB, BC* i *AC* respektivno, datog pravouglog trougla *ABC*. Prema ovome $APBP_1=k*c^2/2$.

Drugo, kao zbir površina pravouglih trouglova *APC* i CBP_1.Prema ovome:

$APBP_1 = APC + BCP_1 = 1/2*b*PC + 1/2*a*CP_1$

a zbog $PC=k*b$ i $CP_1=k*a$ je $APBP_1 = 1/2*k*b^2 + 1/2*k*a^2$.
Iz dobijenih rezultata sledi $k*c^2/2=1/2*k*b^2+1/2*k*a^2$, pa se posle sređivanja izraza dobija $c^2=a^2+b^2$.

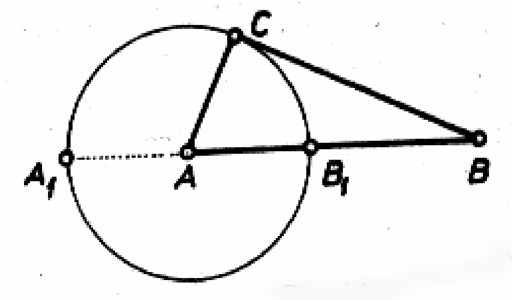
Sedmi dokaz: Za ovaj dokaz se koristi pravilo o tangenti (Dužina tangente povučene iz jedne tačke izvan datog kruga je geometrijska sredina za dužine bilo koje sečice povučene iz iste tačke do njenih presečnih tačaka sa datim krugom.)

Tako, kada se (slika 8.) oko temena A, kao centra datog pravouglog trougla ABC opiše krug sa poluprečnikom $AC=b$ i hipotenuza AB produži do preseka A_1 sa ovim krugom, tada prema pomenutom pravilu važi:

$BC^2=BA_1* BB_1$ ili $a^2=(c+b)*(c-b)$

Odavde sledi: $a^2=c^2-b^2$ odnosno $c^2=a^2+b^2$.

slika 8.

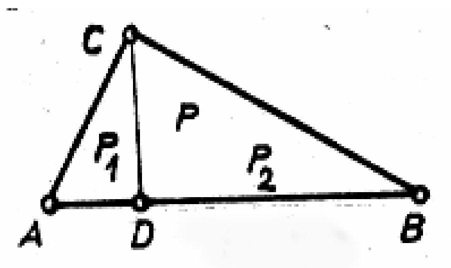


IV GRUPA

Ovu grupu dokaza čine oni dokazi koji se zasnivaju na sličnosti geometrijskih figura; tačnije, na stavu da su površine sličnih trouglova (mnogouglova) proporcionalne kvadratima odgovarajućih stranica odnosno kvadratima odgovarajućih dužinskih elemenata.

Osmi dokaz: Kada se u datom pravouglom trouglu ABC povuče visina CD (slika 9.) koja odgovara hipotenuzi AB, tada se dobijaju dva nova pravougla trougla ACD i BCD koji su slični sa datim trouglom ABC.

slika 9.



Ako su P, P_1 i P_2 površine trouglova ABC, ACD i BCD, onda važi:

$P:P_1:P_2=AB^2:AC^2:BC^2$ ili $P:P_1:P_2=c^2:b^2*a^2$.Prema ovome: $P=k*c^2$, $P_1=k*b^2$ i $P_2=k*a^2$, gde je k faktor proporcionalnosti različit od nule. Kako je $P=P_1+P_2$, to je prema ovome i prethodnom:$k*c^2=k*b^2+k*a^2$ odnosno
$c^2=a^2+b^2$.